

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea I
ediția a XIV-a



mate 2000 – consolidare

Cuprins

Recapitulare și evaluare inițială

| | |
|---|----|
| 1. Exerciții și probleme recapitulative..... | 5 |
| 2. Recapitulare și sistematizare prin teste | 8 |
| Test de autoevaluare | 11 |

ALGEBRĂ

Capitolul: Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Unitatea: Mulțimi

| | |
|---|----|
| 1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice | 15 |
| 2. Relații între mulțimi. Submulțimi | 18 |
| 3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite..... | 20 |
| 4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență..... | 22 |
| 5. Recapitulare și sistematizare prin teste | 28 |
| Test de autoevaluare | 31 |

Unitatea: Divizibilitatea numerelor naturale

| | |
|---|----|
| 1. Divizibilitatea numerelor naturale. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime..... | 34 |
| 2. Determinarea celui mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale. Numere prime între ele..... | 40 |
| 3. Determinarea celui mai mic multiplu comun a două sau mai multor numere naturale..... | 43 |
| 4. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale | 46 |
| 5. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea..... | 50 |
| 6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană..... | 53 |
| 7. Recapitulare și sistematizare prin teste | 54 |
| Test de autoevaluare | 57 |

Capitolul: Rapoarte și proporții

Unitatea: Rapoarte și proporții

| | |
|--|----|
| 1. Rapoarte | 62 |
| 2. Procente..... | 68 |
| 3. Proporții..... | 72 |
| 4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană..... | 79 |
| 5. Recapitulare și sistematizare prin teste | 81 |
| Test de autoevaluare | 85 |

Unitatea: Proporționalitate și elemente de organizare a datelor

| | |
|--|-----|
| 1. Mărimi direct proporționale | 88 |
| 2. Mărimi invers proporționale..... | 92 |
| 3. Regula de trei simplă..... | 96 |
| 4. Elemente de organizare a datelor | 100 |
| 5. Probabilități (Aplicație la rapoarte)..... | 110 |
| 6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană..... | 114 |

| | |
|--|-----|
| 7. Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 115 |
| <i>Test de autoevaluare</i> | 119 |
| AUTOEVALUARE | 122 |
| GEOMETRIE | |
| Capitolul; Noțiuni geometrice fundamentale | |
| Unitatea: Unghiul | |
| 1. Recapitulare și completări | 125 |
| 2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf..... | 129 |
| 3. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct..... | 132 |
| 4. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare | 135 |
| 5. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi..... | 138 |
| 6. Recapitulare și sistematizare prin teste | 142 |
| <i>Test de autoevaluare</i> | 145 |
| Unitatea: Paralelism | |
| 1. Drepte paralele: definiție, notație, construcție intuitivă prin translație. Axioma paralelelor..... | 148 |
| 2. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă..... | 151 |
| 3. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice..... | 157 |
| 4. Recapitulare și sistematizare prin teste | 162 |
| <i>Test de autoevaluare</i> | 165 |
| Unitatea: Perpendicularitate | |
| 1. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție). Oblice..... | 168 |
| 2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice..... | 172 |
| 3. Distanța de la un punct la o dreaptă | 174 |
| 4. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă | 176 |
| 5. Recapitulare și sistematizare prin teste | 181 |
| <i>Test de autoevaluare</i> | 185 |
| Unitatea: Cercul | |
| 1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc..... | 188 |
| 2. Unghi la centru. Măsuri..... | 191 |
| 3. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri ... | 193 |
| 4. Recapitulare și sistematizare prin teste | 196 |
| <i>Test de autoevaluare</i> | 199 |
| AUTOEVALUARE | 202 |
| Teste recapitulative | 203 |
| Probleme date la concursuri școlare | 219 |
| INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI | 221 |

Recapitulare și evaluare inițială

PP Competențe generale (conform programei clasei a V-a)

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

PE 1. Exerciții și probleme recapitative

1. Calculați:
 - a) $(3^{102} : 3^{72} + 2^2 \cdot 2^{25} - 2025^0) : (27^{10} + 8^9 - 18^2 : 324)$;
 - b) $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^3 \cdot 2^{42} - 2^{46} + [3^{150} : 3^{45} - (3^7)^{15}] + 16\}$;
 - c) $1^{2025} - 2025^0 + 3^2 - 2^3 + 2026^1 - 2025^1 + 0^{2030}$;
 - d) $[(2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) : (2^0 + 2^2 + 2^4 + 3^2)] \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3)$.
2. Verificați dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte, știind că n este număr natural:
 - a) $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$;
 - b) $y = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$;
 - c) $z = 100 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99)$;
 - d) $t = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024)$.
3. Calculați ultima cifră a numărului:
 - a) $x = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 5^{2026}$;
 - b) $y = 2^{2027} + 3^{2028} + 5^{2029} + 6^{2030}$;
 - c) $z = 2025^{2033} + 2026^{2033} + 2027^{2033} + 2028^{2033}$;
 - d) $t = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2030}$.
4. a) Transformați fracțiile ordinare $\frac{17}{4}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{43}{15}$ și $\frac{71}{330}$ în fracții zecimale.
b) Transformați fracțiile zecimale $1,9(3)$, $3,08(3)$, $5,28$ și $0,1(23)$ în fracții ordinare ireductibile.
5. a) Aflați numerele care împărțite la 5 dau câtul cu o unitate mai mare decât restul.
b) Calculați câtul și restul împărțirii numărului de forma \overline{abab} la \overline{ab} .
c) Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 12 să dea restul 4 și împărțite la 18 să dea restul 8.
d) Calculați restul împărțirii numărului $70a + 37$ la 7, la 10 și la 14.
6. a) Efectuați calculele:
 - a) $1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} : 2$;
 - b) $5,4 - 1\frac{8}{25} \cdot 3, (3)$;
 - c) $(0,5)^2 + 0, (6) - 0,1(6)$;
 - d) $1,41 \cdot 10^2 : 0,3$;
 - e) $1,1^2 + 0,9^2 : 0,3^3$;
 - f) $1,21 \cdot (2,3 - 1,2) : 1,1^3$.
7. a) Transformați din baza 10 în baza 2 numerele: 29, 31, 47 și 135.

b) Transformați din baza 2 în baza 10 numerele: $1101_{(2)}$, $10111_{(2)}$, $1011101_{(2)}$ și $11100101_{(2)}$.

8. Determinați cifrele x și y , știind că $\overline{2,xy} + \overline{7,yx} = 9,99$.

9. Diferența a două numere naturale este 48. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic, se obțin câtul 3 și restul 2. Aflați numerele.

10. Suma a două numere este 18,4, iar diferența lor este 1,6. Calculați numerele.

11. Într-un bloc sunt apartamente cu 2 camere și apartamente cu 3 camere, în total 20 de apartamente și 45 de camere. Calculați câte apartamente sunt cu 2 camere și câte apartamente sunt cu 3 camere.

12. Ionuț s-a gândit la un număr, din care a scăzut 50. Rezultatul obținut l-a împărțit la 50. A mărit numărul obținut cu 1 și noul rezultat l-a mărit de 10 ori, obținând numărul 100. La ce număr s-a gândit Ionuț?

13. Patru robinete, care au același debit, curg împreună și umplu cu apă un rezervor în 6 ore. Aflați în câte ore pot umple același rezervor 3 robinete cu același debit.

14. Pentru două stilouri și trei pixuri, Ileana a plătit 97,50 de lei. Pentru un stilou și șase pixuri de același fel cu cele cumpărate de Ileana, Tudor a plătit 82,50 de lei. Calculați cât costă un stilou și cât costă un pix.

15. Din cei 28 de elevi ai unei clase, 18 participă la o activitate de ecologizare a spațiului verde, iar 22 participă la o activitate de confecționare a mărtișoarelor din materiale reciclabile. Știind că fiecare elev participă la cel puțin una dintre cele două activități, calculați câți elevi participă:

- a) la ambele activități;
- b) numai la ecologizare;
- c) numai la confecționarea mărtișoarelor.

16. Un dreptunghi are aria egală cu 27 m^2 și lățimea egală cu $0,3$ din lungimea sa. Aflați perimetrul dreptunghiului.

17. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive. Știind că suma tuturor muchiilor paralelipipedului dreptunghic este egală cu 96 cm, calculați volumul paralelipipedului dreptunghic.

18. Aproximați numărul 143073 prin adaos și apoi prin lipsă la:

- a) zeci;
- b) sute;
- c) zeci de mii.

19. Rotunjiți numărul 814526 la:

- a) sute;
- b) mii;
- c) zeci de mii.

20. Calculați:

- a) $24^\circ 17' + 17^\circ 24'$;
- b) $65^\circ 14' - 15^\circ 7'$;
- c) $21^\circ 11' \cdot 5$;
- d) $60^\circ 45' : 5$;
- e) $43^\circ 24' + 17^\circ 53'$;
- f) $74^\circ 10' - 24^\circ 25'$;
- g) $11^\circ 17' \cdot 7$;
- h) $53^\circ 12' : 4$;
- i) $84^\circ 36' : 6 + 6^\circ 7' \cdot 9$.

21. a) Suma a două numere prime este 30. Determinați cele două numere.

b) Diferența a două numere prime este 20. Determinați cele două numere, știind că sunt mai mici decât 50.

c) Determinați numerele prime a și b , știind că $5a + 3b = 19$.

22. Aflați câte numere de forma:

- a) $\overline{x1yz}$ sunt divizibile cu 2;
- b) $\overline{ab2c}$ sunt divizibile cu 5.

23. a) Scrieți cu cifre romane numerele: 2024, 1917, 2137.

b) Scrieți cu cifre arabe numerele: CXXIV, MCCXLIX, MDCCL.

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

TESTUL 1

I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

- (0,5p) 1. Numărul cu $(2^2)^3$ mai mic decât 179 este
- (0,5p) 2. Suma numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 6 este egală cu
- (0,5p) 3. Camelia a cumpărat 3 stilouri și 5 creioane, pentru care a plătit 70 de lei. Ionuț a cumpărat 5 stilouri și 3 creioane de același fel, pentru care a plătit 106 lei. Un stilou a costat
- (0,5p) 4. Lățimea unui dreptunghi reprezintă 75% din lungimea dreptunghiului. Dacă lungimea dreptunghiului este de 20 m, atunci perimetrul dreptunghiului este de

II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (2 puncte)

- (0,5p) 1. Rezultatul calculului $2^3 - 5^0 + 187 : 17$ este egal cu:
A. 14; B. 18; C. 19; D. 20.
- (0,5p) 2. Media aritmetică a numerelor 3,75 și 4,25 este egală cu:
A. 3,90; B. 4; C. 4,05; D. 4,10.
- (0,5p) 3. Frația $\frac{32}{2^n}$ este echiunitară pentru n egal cu:
A. 16; B. 8; C. 5; D. 7.
- (0,5p) 4. Dintre fracțiile zecimale 2,2(3), 2,(23), 2,22 și 2,23 cea mai mare este fracția:
A. 2,(23); B. 2,23; C. 2,2(3); D. 2,22.

III. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Desenați șase puncte distincte două câte două.

- | | A | B |
|--|---|--------|
| (0,5p) 1. Cel mai mare număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... | | a) 6; |
| (0,5p) 2. Cel mai mic număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... | | b) 10; |
| (0,5p) 3. Dacă exact cinci dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se obțin unind punctele date două câte două este egal cu ... | | c) 8; |
| (0,5p) 4. Dacă exact patru dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... | | d) 1; |
| | | e) 15. |

IV. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

- (1p) 1. Împărțind numărul natural nenul a la numărul natural nenul b , se obțin câtul 2 și restul 7. Arătați că numărul $4a - 8b - 1$ este cubul unui număr natural.
- (1p) 2. Calculați $2,3 + \{5 + 0,1 \cdot [100 \cdot 0,01 + 5,2 \cdot (17 - 1,2 : 0,1)]\}$.
- (1p) 3. Scrieți toate numerele de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 5, știind că $x = y + 1$.

Algebră

Capitolul

Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

PP Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în \mathbb{N}

- Recunoașterea unor mulțimi finite sau infinite (mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare/impare, mulțimea cifrelor unui număr, mulțimea divizorilor/multiplilor unui număr natural)
- Definirea unor mulțimi folosind diagrame și/sau enumerare de elemente
- Recunoașterea unor numere prime
- Identificarea, dintr-o mulțime de numere, a unui număr compus
- Identificarea unui divizor al unui număr dat
- Scrierea unui număr natural de două cifre ca produs de puteri de numere prime, prin observare directă
- Scrierea mulțimii divizorilor unui număr natural folosind descompunerea în produs de numere prime
- Recunoașterea unor perechi de numere prime între ele

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n , 3 și 9 în \mathbb{N}

- Recunoașterea și exemplificarea de elemente care aparțin/nu aparțin unei mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor
- Recunoașterea și exemplificarea de mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor; mulțimi care sunt sau nu în relație de incluziune
- Identificarea unor numere naturale care se divid cu 2, 5, 10^n , 3 sau 9, utilizând criteriile de divizibilitate
- Scrierea unui număr natural ca produs de puteri de numere prime folosind descompunerea în factori primi
- Selectarea dintr-o enumerare dată a numerelor naturale prime/compușe

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.

- Reprezentarea unor mulțimi prin diagrame și/sau prin enumerarea elementelor
- Efectuarea de operații cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) punând accentul pe exemple practice

PE-PP

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări.

Relația dintre un element și o mulțime.

Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice



• **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**. Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari: A, B, C, \dots , iar elementele mulțimilor se notează cu litere mici, cu numere, cu anumite simboluri.

• Mulțimile pot fi definite în trei moduri:

1. Enumerând toate elementele mulțimii între acolade

Exemplu: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

2. Enumerând toate elementele mulțimii în interiorul unei linii curbe închise, numită diagramă Venn-Euler

Exemplu: $A = \begin{array}{ccc} \bullet 1 & \bullet 3 & \bullet 7 \\ & \bullet 5 & \bullet 9 \end{array}$

3. Enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii (proprietate pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu se află în mulțime)

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este o cifră impară}\}$.

Citim: *mulțimea A este mulțimea tuturor elementelor x, cu proprietatea că x este cifră impară.*

• Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi x aparține mulțimii A . Dacă x nu este element al mulțimii A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi x nu aparține mulțimii A .

Exemplu: Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, atunci $1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$ și $0 \notin A, 2 \notin A, 6 \notin A, 11 \notin A$.

Observație: Într-o mulțime fiecare element este scris o singură dată.

Exemplu: Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *matematica* este:

$$M = \{m, a, t, e, i, c\}.$$

• Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul \emptyset .

Exemplu: Mulțimea consoanelor din cuvântul *eu*.

• Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale** și se notează cu \mathbb{N} . Scriem:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

• Mulțimea numerelor naturale diferite de zero se numește **mulțimea numerelor naturale nenule** și se notează cu \mathbb{N}^* . Scriem:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

• Dacă toate elementele unei mulțimi sunt numere, atunci mulțimea se numește **mulțime numerică**.

Exemplu: $C = \{2, 7, 11\}$. Mulțimea C are ca elemente doar numere, $2 \in C, 7 \in C, 11 \in C$, și astfel mulțimea C este o mulțime numerică.

• Dacă o mulțime conține cel puțin un element care nu este număr, atunci mulțimea se numește **mulțime nenumerică**.

Exemplu: $D = \{m, a, t, e\}$. Mulțimea D conține literele din care este alcătuit cuvântul *mate*. Mulțimea D este o mulțime nenumerică.

• O mulțime care are n elemente, unde n este un număr natural, se numește **mulțime finită**. Numărul de elemente ale unei mulțimi M se numește **cardinalul mulțimii M** și se notează **card M** .

Exemple:

- Mulțimea vidă (\emptyset) este o mulțime finită și notăm $\text{card } \emptyset = 0$.
- Mulțimea $E = \{0, 4, 7, 15\}$ este o mulțime finită și notăm $\text{card } E = 4$.

• O mulțime care nu are un număr finit de elemente se numește **mulțime infinită**.

Exemple:

- Mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor naturale nenule sunt mulțimi infinite.
- Dreapta, semidreapta, segmentul, considerate ca mulțimi de puncte, sunt mulțimi infinite.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
a) *biblioteca*; b) *cinematecă*; c) *actualități*.
2. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 43257; b) 524123; c) 17230415; d) 425730.
3. Scrieți mulțimea numerelor naturale:
a) mai mici sau egale cu 4; b) cuprinse între 6 și 14.
4. Scrieți mulțimea cifrelor: a) pare; b) impare.
5. Fie mulțimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $2 \in A$; b) $3 \notin A$; c) $2 \notin B$;
d) $1^{2005} \in A$; e) $4 \in A$ și $4 \in B$; f) $1 \in A$ sau $7 \in B$.
6. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.
7. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $3 \in \{0, 1, 3\}$; b) $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
c) $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$; d) $0 \in \emptyset$;
e) $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$; f) $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.
8. Indicați propozițiile false:
a) $2 \in \{1, 7, 3\}$; b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$; c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$; e) $0 \in \emptyset$; f) $0 \notin \emptyset$.
9. Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele acestora:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$;
 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$.

PE Aplicare și exersare **

10. Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și precizați cardinalul mulțimii B .

11. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$; b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$;

c) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$.

12. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}$.

13. Aflați cardinalul mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2025\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1957\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\}$;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}$; $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2026\}$.

14. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

15. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}$; $D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$.

17. Scrieți elementele mulțimilor de mai jos. Ce observați?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}$.

18. Determinați mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{lab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}$.

PE-PP Supermate ****

19. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan proprietățile:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă mulțimea formată din toate elementele mulțimilor A și B ;

b) fiecare mulțime are câte două elemente;

c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

20. Se dă mulțimea A formată din numere naturale, cu proprietățile:

a) $9 \in A$; b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $6 \in A$.

Capitolul

Rapoarte și proporții

PP Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
 - Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de rapoarte, procente
 - Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de proporții și mărimi direct sau invers proporționale, din practică/cotidian sau în context intradisciplinar sau interdisciplinar (de exemplu: scara unei hărți, concentrația unei soluții)
 - Identificarea unor mărimi direct proporționale în reprezentări grafice

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
 - Determinarea unui procent dintr-un număr dat; determinarea unui număr, când se cunoaște un procent din el (de exemplu: reducerea/creșterea prețului unui produs, concentrația unei soluții)
 - Calcularea unei valori necunoscute dintr-o proporție
 - Calcularea unor numere folosind un șir de rapoarte egale
 - Calcularea valorii unui raport folosind un șir de rapoarte egale
 - Organizarea și reprezentarea de date sub formă de grafice, tabele sau diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
 - Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție
 - Rezolvarea de probleme în care intervin rapoarte, procente sau proporții
 - Stabilirea proporționalității (directe sau inverse) între două mărimi și rezolvarea de probleme în care intervin mărimi direct sau invers proporționale, în contexte practic-aplicative sau interdisciplinare
 - Utilizarea unor reguli specifice pentru obținerea de proporții derivate (numai pe exemple numerice)
 - Calcularea probabilității în contexte practic aplicative simple

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

- Exprimarea relației de proporționalitate directă sau inversă între mărimi sub forma unei proporții sau a unei egalități de produse
- Exprimarea în limbaj matematic a datelor unei probleme care se rezolvă cu regula de trei simplă
- Determinarea valorilor minime, maxime și medii dintr-un set de date
- Organizarea informațiilor pe baza unor criterii, utilizând sortarea, clasificarea și reprezentarea grafică (cu accent pe interpretarea aceluiași set de date în contexte diferite și pe utilizarea softurilor matematice)

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date

- Justificarea proporționalității în vederea aplicării regulii de trei simplă
- Interpretarea datelor înregistrate în tabele, grafice sau diagrame; estimări
- Analizarea unui set de date pentru a determina existența unei proporționalități (de exemplu: economie, cotidian)
- Interpretarea mediei unui set de date
- Exprimarea semnificației unor elemente dintr-un grafic

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

- Modelarea matematică a dependențelor direct sau invers proporționale
- Interpretarea unui set de date descrise grafic sau numeric (de exemplu: dacă viteza este constantă, atunci distanța și timpul sunt în relație de proporționalitate directă; dacă distanța este constantă, atunci viteza și timpul sunt în relație de proporționalitate inversă)
- Interpretarea unui raport ca raport procentual sau ca probabilitate



2.1. Procent

Se numește **raport procentual** un raport de forma $\frac{p}{100}$ ($p \in \mathbb{Q}, p \geq 0$).

Observație: Raportul procentual $\frac{p}{100}$ se notează $p\%$ și se citește „ p la sută” sau „ p procente”.

2.2. Aflarea a $p\%$ dintr-un număr

Pentru a calcula $p\%$ dintr-un număr a , se înmulțește numărul a cu $\frac{p}{100}$, adică se efectuează produsul $\frac{p}{100} \cdot a$.

Exemplu: 15% din 120 este $\frac{15}{100} \cdot 120 = 18$.

2.3. Aflarea unui număr când cunoaștem $p\%$ din el

Dacă $p\%$ dintr-un număr necunoscut x este b , adică $\frac{p}{100} \cdot x = b$, atunci $x = b : \frac{p}{100} = \frac{b \cdot 100}{p} = \frac{b \cdot 100}{p} = \frac{100 \cdot b}{p}$.

Exemplu: Dacă 20% dintr-un număr este 45 , calculați numărul.

Se va scrie: $\frac{20}{100} \cdot x = 45$ și $x = 45 : \frac{20}{100} = 45 \cdot \frac{100}{20} = 225$, adică numărul este 225 .

2.4. Calculul raportului procentual

Raportul $\frac{a}{b}$ trebuie scris sub forma $\frac{p}{100}$.

Exemple:

1. Scrieți raportul $\frac{7}{25}$ sub forma unui raport procentual.

Se scrie $\frac{7}{25} = \frac{p}{100}$ și se calculează $p = \frac{7 \cdot 100}{25} = 28$, adică $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$ sau $\frac{7}{25}$ scris sub forma unui raport procentual este 28% .

Observație: Raportul $\frac{7}{25}$ se putea scrie sub forma unui raport procentual și prin amplificare cu 4 , adică $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$, ceea ce înseamnă că $\frac{7}{25}$, scris sub formă de raport procentual, este $\frac{28}{100}$ sau 28% .

2. Calculați cât la sută din 125 este 75 .

Se scrie $\frac{p}{100}$ din 125 este 75 , adică $\frac{p}{100} \cdot 125 = 75$ și se obține $p = 75 : \frac{125}{100} = \frac{75 \cdot 100}{125} = 60$. Deci, 60% din 125 este 75 .

2.5. Creșteri și scăderi cu $p\%$

Dacă un număr crește cu $p\%$, noul număr este $(100 + p)\%$.

Dacă un număr scade cu $p\%$, noul număr este $(100 - p)\%$.

Exemplu: Prețul unui obiect este de 300 de lei.

a) Calculați noul preț dacă obiectul se scumpește cu 20%.

b) Calculați noul preț dacă obiectul se ieftinește cu 20%.

Rezolvare: a) Noul preț al obiectului este 120% din prețul inițial, adică $\frac{120}{100} \cdot 300 = 360$ de lei.

b) Noul preț al obiectului este 80% din prețul inițial, adică $\frac{80}{100} \cdot 300 = 240$ de lei.

2.6. Procente din procente

Exemplu: Prețul unui obiect este de 800 de lei. Obiectul se scumpește cu 20% și apoi se ieftinește cu 20%.

a) Calculați noul preț al obiectului.

b) Cu ce procent s-a modificat prețul final față de cel inițial?

Rezolvare: a) Dacă prețul crește cu 20%, înseamnă că acesta va fi de 120% din prețul inițial, adică $\frac{120}{100} \cdot 800 = 960$ de lei. Prețul scade cu 20%, ceea ce înseamnă că acesta este

80% din noul preț, adică $\frac{80}{100} \cdot 960 = 768$ de lei.

b) Prețul final este 80% din 120% din prețul inițial, adică $\frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} = \frac{96}{100}$ din prețul inițial. Deci prețul final reprezintă 96% din prețul inițial.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Exprimați sub formă de fracții ordinare următoarele procente:

a) 10%; b) 30%; c) 45%; d) 75%; e) 90%.

2. Calculați:

a) 5% din 140; b) 15% din 1200; c) 60% din 3500.

3. Alexandru afirmă că numărul fetelor din clasa lui reprezintă 75 de procente din numărul elevilor clasei. Cum interpretați afirmația lui Alexandru?

4. Aflați:

a) 15% din 60; b) 0,25% din 40; c) $\frac{50}{13}\%$ din 390;

d) 35% din 7000; e) $2\frac{1}{2}\%$ din 44; f) 2,5% din 100.

5. O societate comercială are 2400 de muncitori. Dintre aceștia 40% sunt femei. Câte femei sunt în acea societate comercială?

6. Aflați un număr x , știind că:

a) 15% din el este 225; b) 40% din el este 640; c) 75% din el este 1872.

PE Aprofundare și performanță ***

- 23.** O bicicletă costă 725 de lei.
- Cât va costa bicicleta după o reducere cu 15%?
 - Cât va costa bicicleta după o scumpire cu 10%?
- 24.** O bancă acordă o dobândă anuală de 7%. Calculați ce sumă trebuie depusă la bancă, astfel încât după un an suma să fie de 61204 lei.
- 25.** După o scumpire cu 20%, un obiect costă 67200 de lei.
- Calculați cât a costat obiectul înainte de scumpire.
 - Cu cât la sută trebuie ieftinit obiectul pentru a ajunge la prețul inițial?
 - Care ar fi fost prețul inițial, dacă în locul scumpirii cu 20% ar fi fost două scumpiri succesive cu 5% și 25%?
- 26.** Numărul a reprezintă 20% din numărul b .
- Cât la sută din numărul a reprezintă numărul b ?
 - Cât la sută reprezintă a din $a + b$?
- 27.** Un obiect se scumpește cu 10% și apoi se ieftinește cu 10%, prețul obiectului ajungând la 118800 de lei.
- Care a fost prețul inițial al obiectului?
 - Cât la sută din prețul inițial reprezintă prețul actual al obiectului?
- 28.** Prețul unui obiect, după o scumpire cu 15%, este de 3680 de lei.
- Care a fost prețul inițial al obiectului?
 - Dacă prețul inițial al obiectului a fost de 3200 de lei, calculați ce preț ar avea obiectul după ce s-ar scumpi cu 10% și apoi cu 15% din noul preț.
 - Cât la sută din prețul inițial reprezintă cele două scumpiri la un loc?

PE-PP Supermate ****

- 29.** Aflați numerele naturale a, b, c, d, e , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
- a este egal cu 40% din b și c este egal cu $\frac{6}{5}$ din b ;
 - d este egal cu 25% din e și e este egal cu $\frac{8}{9}$ din d ;
 - media aritmetică a numerelor a, b și c este cu 70 mai mare decât media aritmetică a numerelor d și e .
- 30.** Determinați 4 numere naturale, știind că primul reprezintă 75% din suma celorlalte trei, al doilea reprezintă 40% din suma celorlalte trei, al treilea reprezintă $\frac{2}{19}$ din suma celorlalte trei, al patrulea reprezintă $\frac{4}{17}$ din suma celorlalte trei, iar diferența dintre suma primului cu al treilea și suma celui de-al doilea cu al patrulea este 5.

Etapa județeană, Bacău

- 31.** Considerăm numerele $a, b, c \in \mathbb{N}$ verificând relațiile:

$$a = 33,3\% \cdot (b + c) \text{ și } b = 200\% \cdot (c - a).$$

a) Arătați că $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$.

- b) Determinați a, b, c , știind că c.m.m.m.c. al lor este egal cu 300.

Etapa locală, Bacău

AUTOEVALUARE

Citiți cu atenție afirmațiile de mai jos și acordați un calificativ: **insuficient** (I), **suficient** (S), **bine** (B) sau **foarte bine** (FB) pentru a vă evalua parcursul de învățare din conținuturile studiate.

| AFIRMAȚII | FB | B | S | I |
|--|----|---|---|---|
| 1. Știți să stabiliți relații între un element și o mulțime și între două mulțimi. | | | | |
| 2. Știți să efectuați operații cu mulțimi. | | | | |
| 3. Recunoașteți numerele prime și numerele prime între ele și știți să descompuneți numerele în factori primi. | | | | |
| 4. Știți să calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere sau a mai multor numere naturale. | | | | |
| 5. Știți să aplicați proprietățile divizibilității în rezolvarea problemelor. | | | | |
| 6. Știți să determinați un termen necunoscut dintr-o proporție. | | | | |
| 7. Știți să interpretați un raport ca raport procentual sau ca probabilitate. | | | | |
| 8. Știți să rezolvați probleme în care intervin rapoarte, procente sau proporții. | | | | |
| 9. Știți să identificați mărimile direct proporționale și mărimile invers proporționale. | | | | |
| 10. Știți să rezolvați probleme în care intervin mărimi direct proporționale sau mărimi invers proporționale, în contexte practico-aplicative sau interdisciplinare. | | | | |
| 11. Știți să reprezentați un set de date prin tabele, grafice sau diagrame. | | | | |
| 12. Știți să interpretați datele înregistrate în tabele, grafice sau diagrame. | | | | |

Geometrie

Capitolul

Noțiuni geometrice fundamentale

PP Competențe generale, competențe specifice. Exemple de activități de învățare

- 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
 - 1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date**
 - Identificarea unor drepte sau unghiuri într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare
 - Identificarea unor cercuri și arce de cerc într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare
 - Identificarea unor relații între elemente geometrice date (apartenență, incluziune, egalitate, concurență, paralelism, perpendicularitate, simetrie)
- 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
 - 2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte**
 - Prelucrarea cantitativă a unor informații privind distanțe, lungimi de segmente sau măsuri de unghiuri/arce în vederea stabilirii coliniarității unor puncte, inclusiv în contextul cercului (de exemplu: punctele diametral opuse, centrul cercului)
 - Verificarea faptului că două unghiuri sunt suplementare, complementare sau congruente
 - Aplicarea, într-o configurație dată, a proprietății unghiurilor opuse la vârf și a unghiurilor în jurul unui punct pentru determinarea unor măsuri de unghiuri
- 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
 - 3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice**
 - Utilizarea instrumentelor geometrice (raportor, riglă, compas) pentru realizarea unor figuri geometrice
 - Construcția bisectoarei unui unghi folosind raportorul și rigla, respectiv compasul și rigla
 - Construcția dreptelor paralele, a dreptelor perpendiculare, a mediatoarei unui segment folosind instrumentele geometrice
 - Construcția simetricei unei figuri față de o dreaptă dată
 - Determinarea unor lungimi de segmente utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice
 - Determinarea unor măsuri de unghiuri/arce de cerc utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice